Cours NOMBRES COMPLEXES

1 Calculs avec les nombres complexes

Généralités sur les nombres complexes

Un peu de notation...

On admet l'existence d'un élément i tel que :

$$i^2 = -1$$

Nombre complexe

On appelle **nombre complexe** tout nombre noté z pouvant s'écrire sous la forme :

$$z = a + ib$$

Où :

- a et b sont des réels. On note alors $a, b \in \mathbb{R}$.
- $a + ib$ est la forme algébrique du complexe z.
- a est la partie réelle de z et est notée $\mathcal{R}e(z)$.
- b est la partie imaginaire de z et est notée $\mathcal{I}m(z)$.

Remarque

Tout nombre complexe z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$, l'ensemble des complexes.
Les nombres réels, c'est à dire qui appartiennent à $\mathbb{R}$ et que l'on écrit x, on peut aussi les écrire $x + 0i$, ce qui implique que **tous les réels sont des complexes sans partie imaginaire**.

Exemple

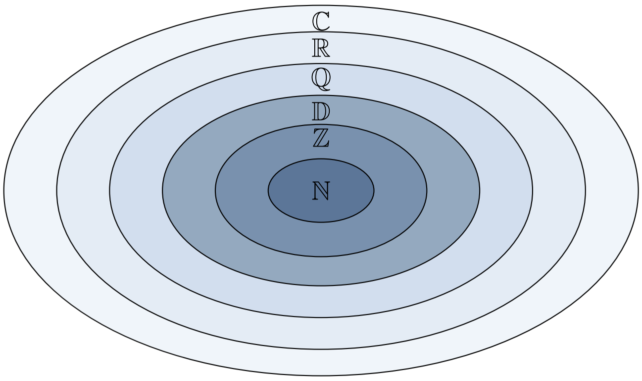
Le réel 5 peut être vu comme le complexe puisque $5 = 5 + 0i$.
De même, -3 est un réel et il correspond à $-3 + 0i \in \mathbb{C}$.

Imaginaire pur

Soit z un nombre complexe $(z \in \mathbb{C})$, alors si $\mathcal{R}e(z)$ est nul, on parle d'**imaginaire pur**.
On parle des nombres complexes z de la forme suivante :

$$z = 0 + bi$$

Où $b \in \mathbb{R}$.



Complément sur les ensembles

Puisque tous les réels sont des complexes, on dit alors que $\mathbb{R}$ **est inclu dans** $\mathbb{C}$. Et cela s'illustre avec le schéma ci-contre.
En partant des naturels, jusqu'aux complexes, l'ensemble qui englobe tous les autres.
On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Inclusion de 2 ensembles

Soient A, B deux ensembles, on dit que **A est inclu dans B** si tous les éléments de A appartiennent aussi à B.

Remarque

La partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe sont des réels.

Égalité des complexes

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes sous forme algébrique, alors on dit que **z_1 et z_2 sont égaux** lorsque leur partie réelles et leurs parties imaginaires sont égales.
On note :

$$(z_1 = z_2) \iff (a_1 = a_2 \quad et \quad b_1 = b_2)$$

Opérations sur les nombres complexes

Somme des complexes

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes, on appelle **somme de z_1 et z_2** définie par :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

Exemple

$z = 1 + 6i$ et $z' = 4 + 8i$ alors :

$$z + z' = (1 + 4) + (6 + 8)i = 5 + 14i$$

Produit des complexes

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes, on appelle **produit de z_1 et z_2** définie par :

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

On obtient $-b_1b_2$ car $b_1b_2i^2 = -b_1b_2$ puisque $i^2 = -1$.

Exemple

$z = 1 + 6i$ et $z' = 4 + 8i$ alors :

$$zz' = (1 + 4i)(6 + 8i) - 4 + 8i$$

Dans les exercices, il sera plus rigoureux de développer les étapes.

Méthode

Calculer le produit de 2 complexes

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, alors on calcul le produit z_1z_2 comme suit :

1. Développer le produit.
2. Simplifier avec $i^2 = -1$.
3. Rassembler les parties réelles et les parties imaginaires entre elles.

Remarque

L'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ muni de l'opération d'addition $+$ et de la multiplication $\cdot$ est appelé corps des complexes et est noté $(\mathbb{C}, +\cdot)$.

2 Module et conjugué d'un nombre complexe

Le module d'un nombre complexe

Module d'un complexe

Soit $z = a + ib$ un complexe sous forme algébrique.
On appelle **module** le réel positif noté $|z|$ et défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemple

$z = 1 + 6i$ alors :

$$|z| = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$$

Sans pouvoir réduire autrement...

Propriété

Le module

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avec $z_2 \neq 0$ alors on a :

1. $(|z| = 0) \iff (z = 0)$
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Remarque

Dans les propriétés précédentes, nous avons décidé de définir z_2 comme étant un nombre complexe puis précisé qu'il doit être différent de 0. Que l'on a écrit : $z_2 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \neq 0$.
Il faut savoir que cette écriture est un peu longue et qu'on peut évidemment l'écrire d'une manière bien plus courte :

$$\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

Ainsi on aurait pu écrire : $z_2 \in \mathbb{C}^*$.
L'ensemble $\mathbb{C}^*$ représente **les complexes privés de 0**.

Conjugué d'un nombre complexe

Conjugué d'un complexe

Soit $z = a + ib$ un complexe sous forme algébrique.
On appelle **conjugué** noté $\overline{z}$ et défini par :

$$\overline{z} = a - ib$$

Exemple

$z = 1 + 6i$ alors :

$$\overline{z} = 1 - 6i$$

on fait : $-\mathcal{I}m(z)$

Le conjugué d'un complexe est obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire de ce dernier.

Propriété

Le conjugué

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avec $z_2 \neq 0$ alors on a :

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
3. $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
4. $(z \in \mathbb{R}) \iff (z = \overline{z})$
5. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
6. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
7. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Simplifier une fraction complexe

Fraction complexe

Soit N le numérateur et D le dénominateur,
Alors toute fraction de la forme :

$$\frac{N}{D}$$

Où D **est une expression complexe** est appelée **fraction complexe**.

Méthode

Simplifier une fraction complexe

Le terme « simplifier » est une autre manière de demander d' **exprimer la forme algébrique** d'un nombre complexe donné.

$$\frac{N}{D} = \frac{N}{D\overline{D}} = \frac{N}{|D|^2}$$

car $D\overline{D} = |D|^2$.

1. Identifier N et D.
2. Déterminer $\overline{D}$ ou $|D|^2$ *(selon la méthode utilisée)*.
3. appliquer la formule correspondante.
4. Conclure.

Exemple

On cherche à simplifier le complexe :

$$z = \frac{3+2i}{2+3i}$$

» **Étape 1 – Identification du numérateur et du dénominateur** On pose : $N = 3+2i$ et $D = 2+3i$
» **Étape 2 – Calculons le conjugué du dénominateur** D Puisque $D = 2+3i$ alors on obtient $\overline{D} = 2-3i$
» **Étape 3 – Simplifions la fraction avec l'une des formules**

$$\frac{N\overline{D}}{D\overline{D}} = \frac{(3+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6-9i+4i-6i^2}{4-6i+6i-9i^2} = \frac{6-5i+6}{4+9} = \frac{12-5i}{13} = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$$

» **Étape 4 – Conclusion** Ainsi on obtient :

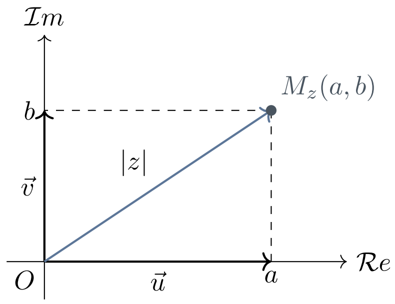
$$\boxed{z = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i}$$

3 Forme géométrique d'un nombre complexe

Représentation géométrique

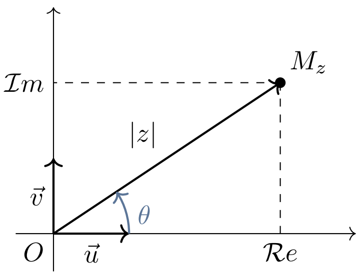
Image d'un nombre complexe

À tout nombre complexe $z = a + ib$ (où $a, b \in \mathbb{R}$), on associe un point M_z de coordonnées cartésiennes (a, b).
Le point M_z est appelé **image du nombre complexe z** dans le plan.



Remarque

- Si $z \neq 0$ alors le poit M_z sera différent de l'origine O du repère.
- La longueur $\overrightarrow{OM_z}$ est égal à $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.



Argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et M_z son image associée dans le plan.
Toute mesure de l'angle θ $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_z})$ est appelée **argument de z** et est noté :

$$arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Remarque

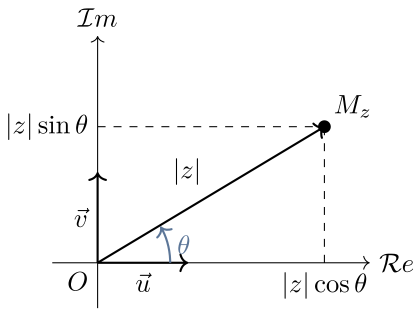
- Si $z = 0$ alors **il n'a pas d'argument**.
- Si z admet un argument, alors il en admet une infinité car tous les angles sont équivalent à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z.
Alors :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

On l'appelle la **forme trigonométrique** de z.



Méthode

Calculer l'argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$

1. Vérifier que $z \neq 0$.
2. Déterminer la forme algébrique *(si besoin)* $z = a + ib$.
3. Calculer le module $|z|$.
4. Trouver θ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Exemple

» **Étape 1 — Vérifier que** $(z \neq 0)\, Ilestclairque\, (z = 2 - 2i \neq 0)\,, donconpeutpoursuivre.$
» **Étape 2 — Déterminer la forme algébrique de** $(z)\; Déjàdonnée : (z = a + ib = 2 - 2i)\,, avec\, (a = 2)\; et\; (b = -2)\,.$
» **Étape 3 — Calcul de** $(|z|)$ $\left[|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\right]$
» **Étape 4 — Calculer le cosinus et le sinus de l'angle** $\left[\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
» **Étape 5 — Déterminer** $(\theta)\; aveclecercletrigonométriquePuisquelecosinusestpositifetlesinusestnégatif \quad :$ $\left[\theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right]$
» **Conclusion** $\left[\boxed{\arg(z) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}}\right]$

Forme trigonométrique d'un complexe

Écriture exponentielle d'un complexe

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Posons :

$$exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et θ un de ses arguments,
Alors :

$$z = |z|\cos(\theta) + i\sin(\theta) = |z|e^{i\theta}$$

C'est la **forme trigonométrique de z**.

Forme exponentielle d'un complexe

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Remarque

On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.
Ainsi, soient $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

$$(z_1 = z_2) \iff (r_1 = r_2 \quad et \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

Les arguments sont égaux à $2k\pi$ près.

Formules de Moivre

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Alors on a :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Ainsi on obtient :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ alors,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4 Résolution d'équations du second degré

Rappels – SPÉ MATHS & MATHS EXPERTES

Polynôme de degré 2

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$.
On appelle **polynôme de degré 2** ou **polynôme du second degré**, tout polynôme de la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Résolution d'une équation de degré 2 à coefficients réels

On souhaite résoudre une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On commence par calculer le discriminant du polynôme noté $\Delta = b^2 - 4ac$ et on détermine les solutions selon les cas :

1. Si $\Delta > 0$
   Alors il y a deux solutions notées x_1 et x_2 réelles telle que :
   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
   Et le polynôme se factorise $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
2. Si $\Delta = 0$
   Alors il y a une solution x_0 dite double telle que :
   $$x_0 = \frac{-b}{2a}$$
   Et le polynôme se factorise $P(x) = a(x - x_0)^2$.
3. Si $\Delta < 0$
   Alors il y a deux solutions complexes z_1 et z_2 de la forme :
   $$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
   Et, le polynôme se factorise $P(x) = (x - z_1)(x - z_2)$

Remarque

Ces cas distincts sont à connaître !

Racine carrée d'un nombre complexe

Racine carrée d'un complexe

Soit $\Delta \in \mathbb{C}$, un nombre complexe donné.
Le nombre $\delta \in \mathbb{C}$ est appelé **racine carrée de Δ** si et seulement si :

$$\delta^2 = \Delta.$$

Remarque

Si $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$ alors, **il est interdit d'écrire « $\sqrt{\Delta}$ »** car la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Nous, notre objectif est de résoudre l'équation $\delta^2 = \Delta$.
Il existe alors 2 méthodes :

- ➢ La **méthode trigonométrique**
- ➢ La **méthode algébrique**

Méthode trigonométrique

Soit θ un argument de $\Delta \neq 0$.
Alors l'équation $\delta^2 = \Delta$ admet deux solutions :

$$\delta_{1,2} = \pm\sqrt{|\Delta|e^{(i\frac{\theta}{2})}}$$

Méthode

Trouver les racines carrées : Méthode trigonométrique

On considère une équation de degré 2 à coefficients complexes $a, b, c \in \mathbb{C}$ de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0$$

1. Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. Vérifier que $\Delta \in \mathbb{C}^*$.
3. Déterminer la **forme exponentielle** de Δ, c'est à dire $\Delta = |\Delta|e^{i\theta}$.
4. Les solutions de l'équation $\delta^2 = \Delta$ sont données par :

$$\delta_{1,2} = \pm\sqrt{|\Delta|e^{(i\frac{\theta}{2})}}$$

Exemple

On souhaite résoudre :

$$\delta^2 = 2i$$

par la **Méthode trigonométrique**.
On pose $\Delta = \delta^2$, i.e. $\Delta = 2i$.

» Étape 4 – Calculer la forme exponentielle de Δ

Calculons $|\Delta|$,
Puisque $\Delta = 2i$ alors $|\Delta| = \sqrt{2^2} = \sqrt{2} = 4$
On se retrouve alors avec :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|\Delta|} = \frac{0}{2} = 0 \quad et \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|\Delta|} = \frac{2}{2} = 1$$

Grâce au cercle trigonométrique, on peut affirmer que l'angle θ cherché est :

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

» Étape 5 – Calculer les solutions

On sait que $\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.
Alors les solutions de $\Delta = 2i$ sont données par :

$$\delta_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad et \quad \delta_2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

On peut essayer de simplifier les expressions :

$$\delta_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})); \quad \delta_2 = -\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$

$$\delta_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad \delta_2 = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{\delta_1 = 1 + i}; \quad \boxed{\delta_2 = -1 - i}$$

Remarque

La méthode trigonométrique peut être difficile à utiliser si l'angle θ a trouver n'est pas un angle remarquable.
C'est pour cela qu'on privilégiera la ***méthode algébrique***.

Propriété

Résolution par la méthode algébrique

Supposons que $\Delta = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Alors l'équation $\Delta = \delta^2$ admet deux solutions de la forme $\delta = x + iy$ où x et y sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = |\Delta| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 & = \mathcal{R}e(\Delta) = a \\ 2xy & = \mathcal{I}m(\Delta) = b \end{cases}$$

Méthode

Trouver les racines carrées : Méthode algébrique

On considère une équation de degré 2 à coefficients complexes $a, b, c \in \mathbb{C}$ de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0$$

1. Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. *Si besoin*, calculer la forme algébrique de Δ.
3. Écrire et résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = |\Delta| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 & = \mathcal{R}e(\Delta) = a \\ 2xy & = \mathcal{I}m(\Delta) = b \end{cases}$$

4. Les solutions de l'équation $\delta^2 = \Delta$ sont données par :

$$\delta_{1,2} = x + iy$$

Chaque couple (x, y) trouvé représente une solution.

Exemple

On souhaite résoudre :

$$\delta^2 = 2 + 2i$$

Posons $\Delta = \delta^2$ donc $\Delta = 3 + 4i$.
» Étape 3 – Écrire et résoudre le système
Commençons par calculer $|\Delta|$

$$|\Delta| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = |\Delta| = 5 \\ x^2 - y^2 & = \mathcal{R}e(\Delta) = 3 \\ 2xy & = \mathcal{I}m(\Delta) = 4 \end{cases}$$

- ➢ $L_1 + L_2$, on a $2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$
- ➢ $L_1 - L_2$, on a $2y^2 = 2 \iff y^2 = 1 \iff y \pm 1$
- ➢ D'après L_3, $2xy > 0$ alors x, y de même signe dans les solutions.

Les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont données par :

$$\boxed{\delta_1 = 2 + i} \quad et \quad \boxed{\delta_2 = -2 - i}$$

Propriété

Solutions finales d'une équation de degré 2

Soit l'équation de degré 2 suivante :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
Alors les solutions de l'équation sont données par :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

Où δ est une racine carrée de Δ.

Méthode

Résoudre une équation de degré 2

1. Déterminer a, b, c et vérifier que $a \neq 0$.
2. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Trouver une racine carrée δ de Δ en utilisant la méthode algébrique ou la méthode trigonométrique.
4. Choisir une des racines carrées trouvées.
5. Déterminer les solutions finales de l'équation :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$